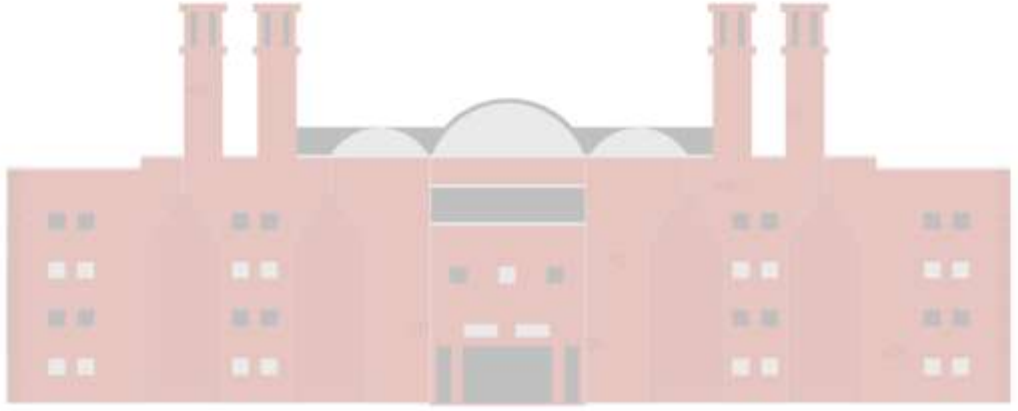
التحليل العددي

المحاضرة الرابع عشر

7 صفحات



الدكتور: عماد فتاش

التاريخ: ٢٠١٤/١١/١٨

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

لقد درسنا سابقا طريقة **كراوت**...

اما بالنسبة لطريقة **دولتل** فهي تشبه الى حد كبير كراوت ولكن في هذه الطريقة نقوم بتعويض عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة L قيمة الواحد(١) بدلا من تعويضها في عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة U كما كنا نفعل سابقا ....

$$\ell_{11} = \ell_{22} = \cdots \ldots . = \ell_{nn} = 1$$

(اجتهاد شخصي) "" W.T ""

أما بالنسبة لصيغ استنتاج المجاهيل فهي مشابهة لصيغ وقوانين كروات ولكن بتبديل الـ U بـ L وبالعكس ....

فيكون قانون حساب باقي عناصر المصفوفة L :

$$\left[\begin{array}{l} l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{is}\, u_{sj})/u_{jj} \\ i \le j \end{array} \right.$$

ولحساب العمود الأول من هذه المصفوفة : $\ell_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}$

ويكون قانون حساب عناصر المصفوفة U:

$$\left[\begin{array}{l} u_{ij} = aij - \sum_{s=1}^{i-1} l_{is}\, u_{sj} \\ i > j \end{array} \right.$$

ولحساب عناصر الصف الأول من هذه المصفوفة: $u_{i1} = a_{i1}$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

نوجد العناصر كالاتي :

- نفرض عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة L تساوي الواحد $\ell_{11} = \ell_{22} = \ell_{33} = 1$
- ونحسب عناصر الصف الأول من المصفوفة U وذلك بالقانون: $u_{i1} = a_{i1}$

اذن : $u_{11} = a_{11} = 8, u_{12} = a_{12} = 2\,, u_{13} = a_{13} = 9$

- ونقوم بحساب عناصر العمود الأول من المصفوفة L وذلك بالقانون : $\ell_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\,, l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

- ثم نحسب عناصر الصف الثاني من المصفوفة U وذلك بالقانون العام التالي :

$$u_{ij} = aij - \sum_{s=1}^{i-1} l_{is}\, u_{sj}$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$u_{22} = a_{22} - \sum_{s=1}^{2-1} l_{21}\, u_{12} \;= 9 - \left(\frac{1}{2} \times 2\right) = 8$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}\, u_{13} = 4 - \left(\frac{1}{2} \times 9\right) = -\frac{1}{2}$$

- نحسب عناصر العمود الثاني للمصفوفة L وذلك من خلال القانون :

$$\mathrm{l_{ij}} = (\mathrm{a_{ij}} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{is}\, u_{sj})/u_{jj}$$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = (7 - \frac{3}{4} \times 2)/8 = 11/16$$

- وأخيرا نحسب الصف الثالث للمصفوفة U مجددا :

$$u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) = 9 - (\frac{3}{4} \times 9 - \frac{1}{2} \times \frac{11}{16}) = 83/32$$

فتصبح لدينا مصفوفة الجداءات :

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & 11/16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 0 & 8 & -1/2 \\ 0 & 0 & 83/32 \end{bmatrix}$$

وهو الجواب الذي كتبه الدكتور.

مثال: استخدم طريقة التحليل إلى عوامل (كراوت) :

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$$

ونقوم باستنتاج باقي العناصر من خلال القوانين المعطاة سابقاً في المحاضرة السابقة.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{22}{5} & 0 \\ 1 & \frac{6}{5} & \frac{273}{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نفرض: $\boldsymbol{XU = Y}$ و نوجد ال Y من خلال $L.Y = B$: وثم نوجد ال X من خلال : $UX = Y$

معالجة أخرى لطريقة التحليل إلى عوامل :

$$\boldsymbol{AX = B}$$

نحلل ال A إلى مصفوفتين من خلال التحليل إلى عوامل

$$A = L.L^t$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

.
.
.
.

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33}$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

$$A = L.L^t = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}$$

أما في الحالة العامة:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 \dots \dots \dots . . 0 \\ l_{21} & l_{22} \dots \dots . . 0 \\ l_{n1} & l_{n2} \dots l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots \dots . . l_{n1} \\ 0 & l_{22} \dots \dots \dots . . l_{n2} \\ 0 & 0 \dots \dots \dots \dots . l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

.
.
.

$$\begin{cases} l_{n1}^2 + l_{n2}^2 + \dots + l_{nn}^2 = a_{nn} \\ l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - l_{n1}^2 - l_{n2}^2 - \dots \dots \dots \dots . . -l_{n,n-1}^2} \end{cases}$$

الطرق غير المباشرة في حل جمل المعادلات الخطية :

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

١) طريقة التكرار (جاكوبي) $AX = B$

الحل : $R = X^*$

٢) طريقة غاوس-سايدل .

نتذكر من المحاضرات السابقة أن شروط النظيم : $norm : ||.||$

- $||X|| \geq 0$
- $||X|| = 0 \Leftrightarrow X = 0$
- $\begin{cases} ||\alpha X|| = |\alpha| \, ||X|| \\ \forall \alpha \in R \ , \forall X \in R^n \end{cases}$
- $X, Y \in R^n \qquad ||X+Y|| \leq ||X|| + ||Y||$

❖ نظائم شهيرة :

i. $||X||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

ii. $||X||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

iii. $||X||_\infty = Max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ "أكبر المركبات القيمة المطلقة

iv. $||X||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

v. $||X_{k+1} - X_k|| \leq \varepsilon$

مثال : $X = \begin{pmatrix} 0.12 \\ -0.15 \\ 0,16 \end{pmatrix}$

$$||X||_1 = 0.12 + 0.15 + 0.16 = 0.43$$

$$||X||_2 = (0.12^2 + 0.15^2 + 0.16^2)^{\frac{1}{2}} = 0.25$$

$$||X||_\infty = Max\{0.12, 0.15, 0.16\} = 0.16$$

نظيم مصفوفة:

$$|| \ ||. M(A_{n\times n}) \to R^+$$

$$A \to ||A||$$

شروط نظيم مصفوفة:

$* \ ||A|| \geq 0 \ ; \ \forall A \in M_{n\times n}$

$* \ ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = (0)$ المصفوفة الصفرية

$$* \ \|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\| \quad \forall \, \alpha \in R, \ \ \forall A \in M$$

$$* \ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

بعض النظم الشهير:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\| = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\lambda_j (AA^T)}$$

$$\|A\|_E = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

حيث يسمى $\|A\|_E$ النظيم الإقليدي ؛ نسبة إلى العالم إقليديس .

مثال: أوجد التنظيم الإقليدي:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.4 & 0 \\ 0.2 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_E = \{|0.1|^2 + |-0.4|^2 + 0^2 + |0.2|^2 + \cdots + |0.3|^2\}^{\frac{1}{2}} \approx 0.63$$

ما هي طرق التكرار: (جاكوبي)

ليكن لدينا المعادلة $AX = B$ وسيكون الحل X^*

وفق أمام المعادلات (الصيغ) التالية المكونة للجمل الخطية:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} (*)$$

هذه العناصر موجودة ولكن كأن في هذه الأماكن صفر

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}}(\qquad + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + \qquad + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1})$$

$$X = \tilde{B} - \tilde{A}X$$

$$X_{k+1} = \tilde{B} - \tilde{A}X_k$$

$$k = 0,1,2, \dots \dots$$

وهي طريقة تكرار جاكوبي

ملاحظة: يتم اختيار شعاع البدء (الإبتدائي) X_0 شُعاعاً صفرياً إن لم يعطى..

مثال:

$$\begin{cases} -2x + y + 5z = 15 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases}$$

سوف نأخذ الشعاع البدء $X_0 = (1,2,2)$

$$\begin{cases} -2x = 15 - y - 5z \Rightarrow x = -\frac{15}{2} + \frac{0 + y + 5z}{2} \\ -8y = -21 - 4x - z \Rightarrow y = \frac{21}{8} + \frac{4x + 0 + z}{8} \\ z = 7 - 4x + y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} \\ \frac{21}{8} \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

نقوم بحل هذه المعادلات حلّاً مشترك ونوجد الحل:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{-15 + y_k + 5z_k}{2} \\ y_{k+1} = \frac{21 + 4x_k + z_k}{8} \\ z_{k+1} = 7 - 4x_k + y_k \end{cases}$$

	x_k	y_k	z_k
0	1.0	2.0	2.0
1	−1.5	3.37	5.0
⋮	⋮	⋮	⋮
3	34.68	8.01	−17.25
⋮	⋮	⋮	⋮
6	502.6	−124.9	1202.56

إذا هي مّتباعدة عن الحل.

لن يفشل أبداً إنسان يحاول ثم يحاول ثم يحاول ثم …

يحاول.